

Inženjerska geodezija 2

PREDAVANJE

KONCEPTI ELEMENTARNE STATISTIČKE ANALIZE REZULTATA MERENJA

dr Milutin Pejović, dipl.geod.inž.

mpejovic@grf.bg.ac.rs

Univerzitet u Beogradu, Građevinski fakultet

Odsek za geodeziju i geoinformatiku

Beograd, 2026.



Šta ćemo učiti u okviru ovog predavanja?

U okviru ovog predavanja naučićete:

- **Ulogu verovatnoće u statističkoj analizi merenja**
- **Osnovne statističke ocene**

Statistička analiza rezultata merenja

Statistika kao naučna disciplina omogućava donošenje zaključaka na osnovu skupova podataka; to je nauka koja proučava različite aspekte datog skupa podataka i obuhvata metode i postupke za:

Cilj	Šta se radi	Statistički koncept
Prikupljanje i analiza podataka	Organizovanje i obrada skupa podataka	Uzorkovanje (sampling distribution)
Prikazivanje i sumiranje podataka	Sumiranje i vizuelizacija podataka	Frekventna raspodela (frequency distribution)
Izvođenje informacija	Predviđanje i donošenje odluka na osnovu podataka	Statističko zaključivanje (statistical inference)
Provera i validacija podataka	Testiranje usklađenosti sa pretpostavkama i standardima	Testiranje hipoteza (hypothesis testing)

Statistika i verovatnoća

U statistici se zakoni **verovatnoće** primenjuju kako bi se dobile procene ili izveli zaključci na osnovu datog skupa podataka. Verovatnoća se odnosi na statističke događaje (eksperimente/merenja u određenim uslovima) i teži da kvantifikuje verovatnoću da će se neki događaj dogoditi. **Verovatnoća** ima za cilj da predvidi i opiše prosečne vrednosti koje bi bile dobijene kada bi se eksperimenti ponavljali beskonačno mnogo puta. Drugim rečima, verovatnoća predstavlja graničnu vrednost relativne učestalosti pojavljivanja nekog događaja kada broj ponavljanja eksperimenta teži beskonačnosti.

Važan koncept u teoriji verovatnoće je koncept **slučajne promenljive**. Ako jedan statistički događaj može imati više vrednosti, onda takav događaj nazivamo **slučajnom (ili stohastičkom) promenljivom**. **Tačnije, slučajnom promenljivom nazivamo veličinu koja može imati više vrednosti kojima se pripisuje određena verovatnoća pojave.** **U kontekstu geodezije, slučajna promenljiva je veličina čije se vrednosti mogu dobiti putem merenja.** Ako ta veličina ima predefinisani i konačan skup mogućih vrednosti, tada govorimo o **diskretnoj** slučajnoj promenljivoj. U suprotnom, ako ta veličina ima beskonačan skup mogućih vrednosti, tada govorimo o **kontinualnoj** slučajnoj veličini.

Merene veličine u geodeziji mogu se smatrati kontinualnim slučajnim promenljivim. Ako bi takvu veličinu (slučajnu promenljivu) merili beskonačno mnogo puta u određenim uslovima, dobili bismo isto toliko rezultata merenja. Skup tih rezultata merenja naziva se **populacijom**. Tačnije, populacija predstavlja beskonačni skup rezultata merenja jednog statističkog događaja koji, u konkretnom kontekstu istraživanja, predstavlja slučajnu promenljivu.

Ukupan skup mogućih vrednosti slučajne promenljive, zajedno sa njihovim verovatnoćama, čini ono što se naziva **raspodela verovatnoće** (probability distribution) koja je pridružena toj slučajnoj promenljivoj.

Prema tome, raspodela verovatnoće opisuje različite verovatnoće povezane sa mogućim vrednostima slučajne promenljive.

Ove raspodele se dele na dve vrste:

- **Kumulativne funkcije raspodele (cumulative distribution functions)**
- **Funkcije gustine verovatnoće (probability density functions)**

Kumulativna funkcija raspodele

Kumulativna funkcija raspodele $F(x)$ za slučajnu promenljivu X definiše se relacijom:

$$P(X \leq x) = F(x)$$

Verovatnoća da slučajna promenljiva X uzme vrednosti manje ili jednake od x (gde je x promenljiva veličina) definiše funkciju $F(x)$, odnosno **kumulativnu funkciju raspodele**.

Pošto su verovatnoće, prema definiciji ograničene na vrednosti između 0 i 1 (odnosno $0 \leq P \leq 1$), funkcija raspodele $F(x)$ zadovoljava sledeće granične uslove:

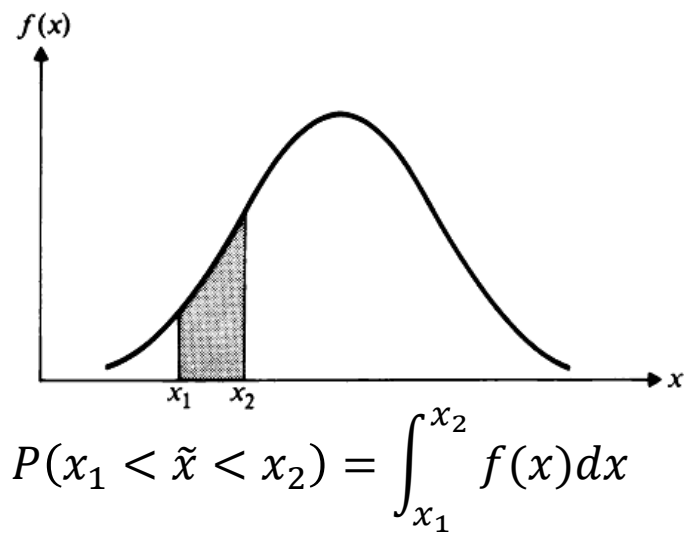
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0 \quad \text{i} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$$

Funkcija gustine verovatnoće (ili funkcija gustine raspodele)

U odnosu na kumulativnu funkciju raspodele, **funkcija gustine verovatnoće** - $f(x)$ može se izraziti kao:

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$$

što u prosto interpretaciji znači da funkcija gustine verovatnoće predstavlja raspodelu verovatnoće po vrednostima x . Kako je verovatnoća pojave tačno određenog događaja mala (bliska nuli), funkcija gustine verovatnoće ima smisla ako je cilj određivanje verovatnoće pojave događaja vezanog za interval u vrednostima x -a:



Za funkciju gustine verovatnoće važi sledeće:

1) $f(x) \geq 0$

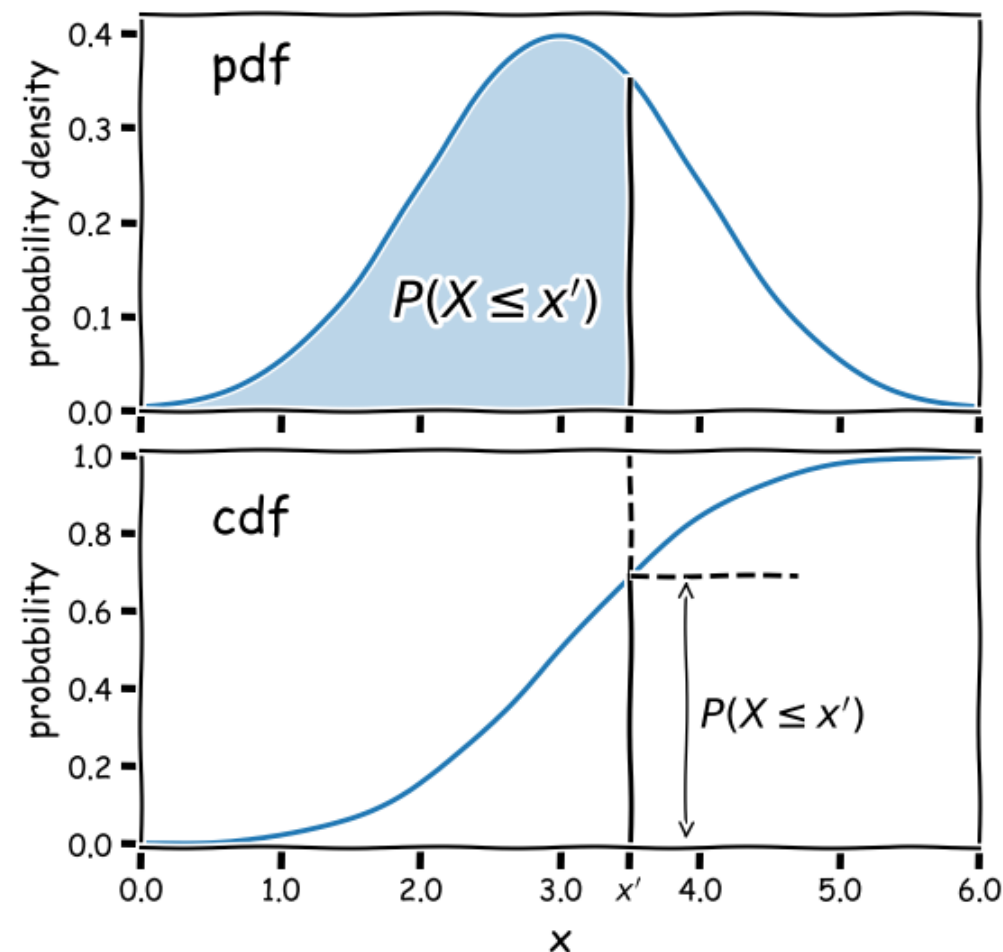
2) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$

Funkcije raspodele – uporedno

Funkcija gustine verovatnoće $f(x)$ daje verovatnoću pojave događaja koji je vezan za određeni interval vrednosti slučajne promenljive i verovatnoća je jednaka površini ispod krive, između dve vrednosti intervala.



Funkcija **kumulativne funkcije raspodele (cdf)**, daje verovatnoću da slučajna promenljiva uzme vrednost manju ili jednaku od zadate vrednosti.



Višedimenzionalne raspodele

U mnogim praktičnim situacijama često se susrećemo sa slučajevima koji uključuju više od jedne slučajne promenljive. Na primer, slučaj dve slučajne promenljive X i Y ima dvodimenzionalnu kumulativnu funkciju raspodele $F(x, y)$. Zajednička verovatnoća da X uzme vrednosti manje od x , a Y vrednosti manje od y (pri čemu su x i y promenljive veličine) data je kao:

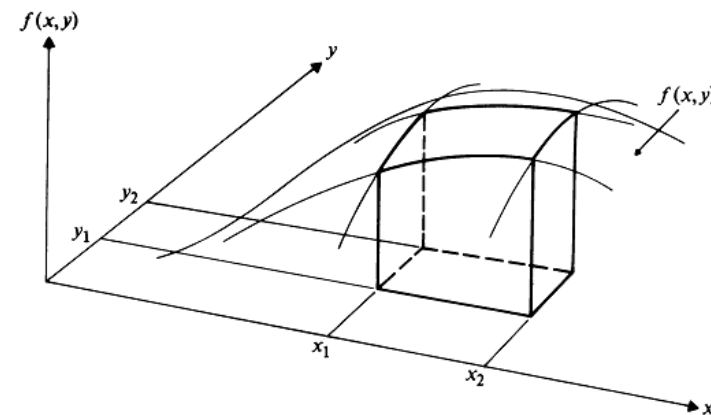
$$F(x, y) = P(\tilde{x} < x, \tilde{y} < y)$$

Na način sličan jednodimenzionalnom slučaju, ako $f(x, y)$ predstavlja dvodimenzionalnu funkciju gustine verovatnoće, i ako se pretpostave kontinualne diferencijabilne funkcije, tada važi:

$$f(x, y) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y} \quad F(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(u, v) du dv$$

Verovatnoća da dve slučajne promenljive X i Y uzmu vrednosti između x_1 i x_2 , odnosno y_1 i y_2 , data je izrazom:

$$P(x_1 < \tilde{x} < x_2; y_1 < \tilde{y} < y_2) = \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} f(u, v) du dv$$



Srednja vrednost populacije

Raspodela i funkcije gustine verovatnoće slučajnih promenljivih karakterišu se (i određuju) pomoću niza parametara koji su korisni za razumevanje njihovog ponašanja.

Očekivanje $E(X)$ slučajne promenljive X , ako postoji, definiše se kao srednja vrednost μ slučajne promenljive. Ono se računa kao suma svih mogućih vrednosti x_i promenljive X , pri čemu je svakoj vrednosti dodeljena odgovarajuća verovatnoća $P(x_i)$:

$$E(X) = \mu = \sum_{i=1}^n x_i \cdot P(x_i)$$

Za slučajnu promenljivu X sa kontinuiranom funkcijom gustine $f(x)$, očekivanje se definiše kao:

$$E(X) = \mu_x = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$$

Ako postoji n mogućih vrednosti x_i promenljive X , i ako su sve verovatnoće jednake, tj.

$$P(x_i) = \frac{1}{n} = \text{konstanta}$$

tada se očekivanje μ_x svodi na aritmetičku sredinu tih n vrednosti x_i .

Varijansa (standardna devijacija) populacije

Neka je funkcija $g(\tilde{x})$ definisana kao:

$$g(X) = (X - E(X))^2 = (X - \mu_x)^2$$

Očekivanje ove posebne funkcije $g(X)$ naziva se varijansa slučajne promenljive X i definiše se kao:

$$\text{var}(X) = \sigma_x^2 = E[g(X)] = E[(X - E(X))^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_x)^2 f(x) dx$$

gde je $f(x)$ funkcija gustine verovatnoće promenljive X , za koju se pretpostavlja da je kontinuirana.

Kvadratni koren varijanse σ_x^2 , označen kao σ_x , naziva se **standardna devijacija**.

Varijansa (ili standardna devijacija) predstavlja meru rasipanja vrednosti slučajne promenljive oko očekivane (srednje) vrednosti.

Kovarijansa i korelacija

Na sličan način kao što se definiše varijansa jedne slučajne promenljive, **kovarijansa** se uvodi kada posmatramo dve slučajne promenljive. Neka slučajne promenljive X i Y imaju zajedničku funkciju gustine verovatnoće $f(x, y)$:

$$f(X, Y) = [(X - E(X))(Y - E(Y))] = [(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)]$$

Kovarijansa između X i Y definiše se kao očekivanje funkcije $f(X, Y)$:

$$\text{cov}(X, Y) = \sigma_{xy} = E[f(X, Y)] = E[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)]$$

Odnosno kao:

$$\sigma_{xy} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_x)(y - \mu_y)f(x, y)dx dy$$

Dok varijansa opisuje rasipanje jedne promenljive, kovarijansa opisuje zajedničku varijaciju dve promenljive, odnosno njihovu međuzavisnost (korelaciju).

Više dimenzionalni skupovi merenja – Kovariaciona matrica

Ako imamo skup merenih veličina (npr. n -dužina ili n -visinskih razlika). Skup merenja se može predstaviti kao vektor:

$$\ell = \begin{bmatrix} \ell_1 \\ \ell_2 \\ \vdots \\ \ell_n \end{bmatrix} \quad \text{gde je } \ell_i (i = 1, 2, \dots, n) \text{ podvektor merenja } i\text{-te merene veličine u vektoru } \ell.$$

Ako je vektor istinitih vrednosti ovih merenih veličina: $\mu = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_n \end{bmatrix}$

Ako znamo da je istinita greška $\varepsilon = \ell - \mu$, Kovariaciona matrica K može se dati kao $K = E(\varepsilon\varepsilon^T)$, gde je $E(\cdot)$ operator poznat kao matematičko očekivanje, odnosno:

$$K = \begin{bmatrix} \sigma_{11}^2 & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22}^2 & \cdots & \sigma_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \cdots & \sigma_{nn}^2 \end{bmatrix}$$

Glavni dijagonalni elementi matrice su varijanse odgovarajućih veličina, a van-dijagonalni elementi predstavljaju kovarijanse. Kao što se vidi, matrica je simetrična, što znači da je $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$, npr. $\sigma_{12} = \sigma_{21}$.

Koeficijent korelacije

Koeficijent korelacije ρ definiše se kao:

$$\rho_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} = E \left[\frac{X - E(X)}{\sigma_x} \cdot \frac{Y - E(Y)}{\sigma_y} \right]$$

gde su:

- σ_x, σ_y - standardne devijacije promenljivih
- $\rho_{xy} \in [-1, 1]$

Korelacija između dve slučajne promenljive opisuje njihovu statističku zavisnost.

Medutim, treba naglasiti:

- Korelacija $\neq$ statistička zavisnost (u opštem slučaju). Iako se često koriste kao sinonimi, to nisu isti pojmovi.
- Ako su promenljive statistički nezavisne tada je: $\sigma_{xy} = 0$, Ali obrnuto NE važi uvek $\sigma_{xy} = 0$ ne znači nužno nezavisnost

Normalna raspodela

Jednačina normalne raspodele

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

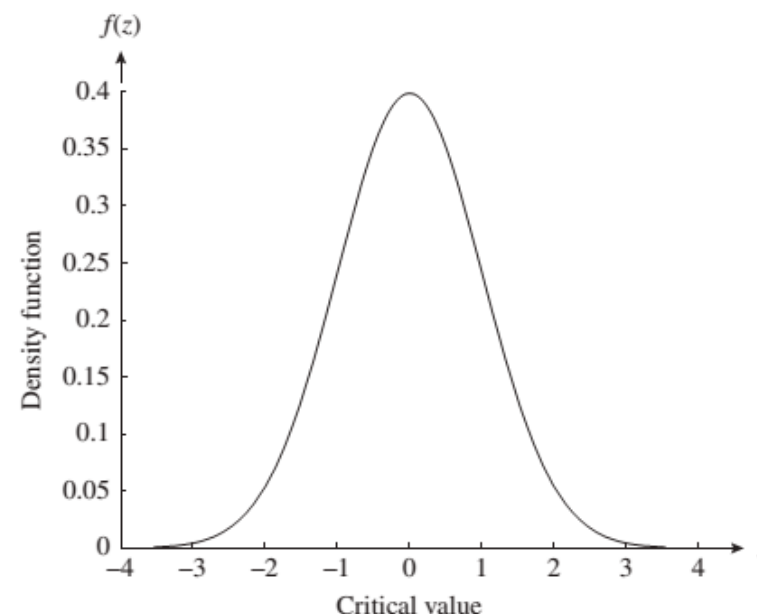
gde je:

- $f(x)$ - gustina verovatnoće
- μ – matematičko očekivanje (srednja vrednost)
- σ - standardna devijacija

Faktor $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$ obezbeđuje da ukupna površina ispod krive bude jednaka 1

Ako je srednja vrednost greške jednaka nuli ($\mu = 0$), tada funkcija postaje:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sigma}\right)^2}$$



Standardna Normalna raspodela

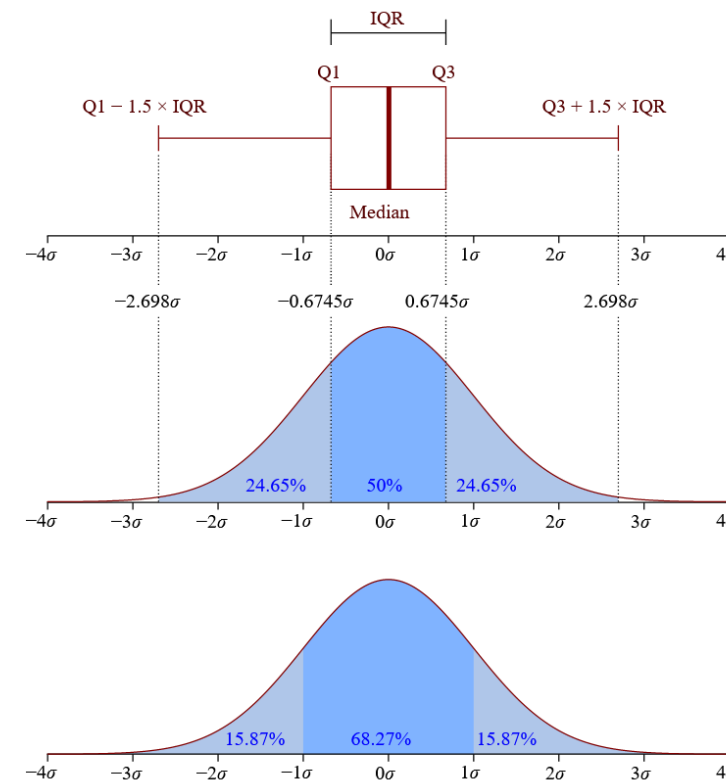
Standardna normalna raspodela $f(z)$ dobija se kada se jednačina normalne rasporedele primeni na standardizovanu slučajnu opservablu Z , čija se vrednost može izraziti kao:

$$Z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

u tom slučaju standardna normalna raspodela $f(z)$ uzima $\sigma = 1$, čime se iz jednačine dobija

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2}$$

Neka od važnih svojstava promenljive z jesu da ona ima srednju vrednost populacije μ jednaku nuli i varijansu populacije σ^2 jednaku 1, te da je bezdimenziona veličina. Vrednosti z ponekad se nazivaju standardizovanim vrednostima (z -vrednosti ili z -skorovi). Jedna interpretacija promenljive Z jeste što predstavlja koliko standardnih devijacija je rezultat merenja x udaljen od srednje vrednosti populacije μ . Kao što se može videti na slici, ose z izražene su u terminima broja standardnih devijacija za koje se vrednost $x - \mu$ udaljava od položaja gde $x - \mu$ ima vrednost nula. Numeričke vrednosti funkcije gustine verovatnoće (pdf) iz jednačine obično su date u statističkim tabelama za standardnu normalnu raspodelu za bilo koju zadatu vrednost promenljive z .



Model merenja – stohastički model

Stohastički model – merenja su uvek pod uticajem određenih nepredvidivih faktora. Ona mogu biti podložna fizičkim uticajima koji se ne mogu u potpunosti kontrolisati, što dovodi do određene promenljivosti rezultata kada se merenja ponavljaju. Promenljivost rezultata merenja može, ali i ne mora, biti pripisana nekim jasno određenim fizičkim uzrocima. Takve statističke varijacije, bilo da nastaju zbog zanemarivanja fizičkih ili vremenski zavisnih uticaja ili zbog inherentnih osobina fizičkih procesa, predstavljaju osnovnu karakteristiku merenja.

Sa praktične tačke gledišta prilično je teško proceniti statističke osobine merenja. Jedan način jeste da se izvrše ponovljena merenja i iz njih odrede potrebne statističke karakteristike, ali je to obično zahtevno. Drugi način, koji se često koristi, jeste da se statističke osobine pretpostave na osnovu opšteg iskustva sa sličnim merenjima koja su u prošlosti izvršena u sličnim uslovima. Zbog toga je, kada se vrše merenja, potrebno zabeležiti sve relevantne fizičke i okolinske uslove tokom perioda merenja kako bi se rezultati mogli pravilno proceniti.

U praksi se često prihvataju prilično grube aproksimacije statističkih osobina opažanja. Na primer, u geodeziji se opažanja obično smatraju **statistički nezavisnim** i često **jednake preciznosti (težine)**.

Matematički formulisane pretpostavke o statističkim osobinama merenja naziva se **stohastički model**.

Populacija i uzorak

Populacija se smatra poznatom kada je poznata raspodela verovatnoće (ili funkcija gustine) odgovarajuće slučajne promenljive. Na primer, ako je neka slučajna promenljiva normalno raspodeljena, tada se i populacija smatra normalno raspodeljenom, a njeni parametri, kao što su srednja vrednost populacije (μ) i standardna devijacija populacije (σ), takođe se smatraju poznatim.

U slučaju kada raspodela verovatnoće populacije nije poznata, mogu se postaviti određene hipoteze ili pretpostavke o opštem ponašanju raspodele (ili funkcije gustine), na primer pretpostavka normalne raspodele.

Ako jedna ili obe vrednosti, μ i σ , nisu poznate, potrebno ih je proceniti. U tu svrhu uzimaju se slučajni uzorci iz populacije, koji se zatim koriste za određivanje vrednosti parametara populacije.

Populacija i uzorak

Sobzirom na veliki obim vrednosti koji obuhvata populacija, u okviru bilo kojeg eksperimenta nije moguće dobiti kompletan skup vrednosti populacije. Statistički događaji (na primer, merenja) smatraju se realizacijama slučajnih promenljivih. Te realizacije, bilo da su ponovljene ili ne, uvek su ograničene po obimu. One se nazivaju **uzorci** iz raspodela verovatnoće. U tom smislu, skup vrednosti koji se dobiju u okviru jednog eksperimenta (statističkog događaja) naziva se **uzorak**. Primenjujući zakone verovatnoće koje povezujemo sa eksperimentom (statističkim događajem) možemo doneti određene zaključke o populaciji slučajne promenljive na osnovu uzorka.

Na osnovu vrednosti uzorka, raspodele verovatnoće slučajnih promenljivih, ili bar neki od njihovih parametara, treba da se odrede ili procene. Metod najmanjih kvadrata, na primer, predstavlja jedan od metoda za procenu očekivanja slučajnih promenljivih na osnovu uzorka (merenja).

Greške – korekcije - reziduali

Istinita greška – Istinita greška se definiše kao razlika između istinite i izmerene vrednosti:

$$\delta_k = x_k - \mu$$

Usled nepoznavanja istinite vrednosti merene veličine, istinita greška ostaje takođe nepoznata.

Prividna ili pojavna greška – Ako sa $\bar{x}$ označimo najverovatniju vrednost, razlika između najverovatnije i izmerene vrednosti naziva se korekcija ili rezidual (eng. **residual**). Prividna ili pojavna greška ima istu vrednost kao rezidual, samo suprotan znak:

Korekcija ili Rezidual

$$v_k = \bar{x} - x_k$$

Prividna ili pojavna greška

$$\varepsilon_k = x_k - \bar{x}$$

merenje + rezidual = najverovatnija vrednost

merenje – najverovatnija vrednost = prividna greška

merenje – istinska vrednost = istinita greška

Centralna granična teorema

Pretpostavimo da merimo dužinu od **29.42 m**, i da je preciznost merenja je ± 0.05 m. Ako pretpostavimo da je svaka vrednost **29.42 ± 0.05 m** podjednako verovatna (uniformna raspodela), onda imamo 11 jednako mogućih ishoda unutar opsega od 29.37 m do 29.47 m.

Greške: -0.05, -0.04, -0.03, -0.02, -0.01, **0.00**, +0.01, +0.02, +0.03, +0.04, +0.05.

Ako merimo dve susedne deonice na isti način, ukupna dužina je zbir dve izmerene vrednosti. Ukupan broj kombinacija grešaka za te dve deonice je: **11 kombinacija (prva deonica) $\times$ 11 kombinacija (druga deonica) = 121 mogućnost.**

Ukupni opseg greške zbira se sada kreće od **-0.10 m do +0.10 m**.



Ako imamo 121 kombinaciju, one se ne pojavljuju podjednako često u rezultatu zbira!

Centralna granična teorema

Ekstremna greška (-0.10 m): Može se desiti na samo 1 način – ako na obe deonice napravimo maksimalnu negativnu grešku (-0.05 i -0.05).

Verovatnoća: $1/121 \approx 0.0083$ (0.8%).

Greška od -0.08 m: Može se desiti na 3 načina:

(-0.05 i -0.03)

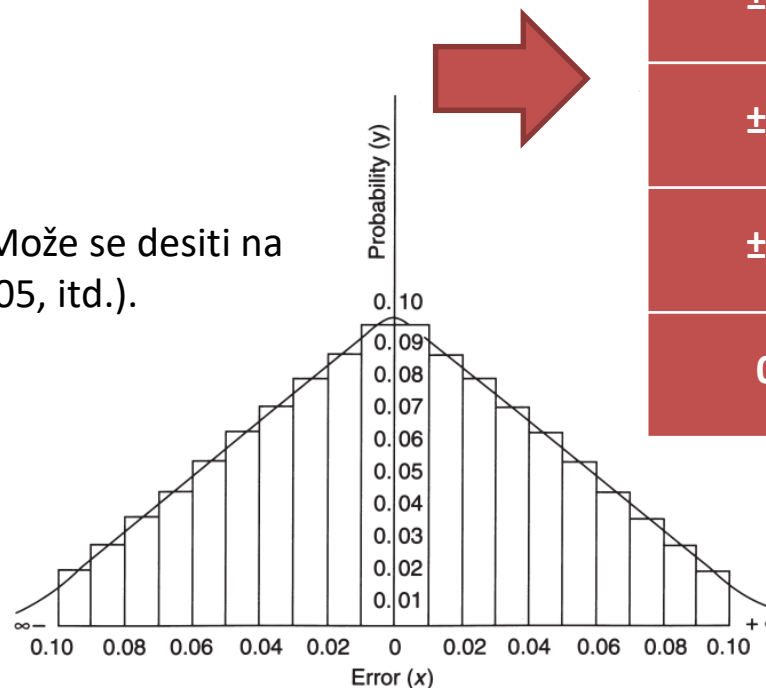
(-0.04 i -0.04)

(-0.03 i -0.05)

Verovatnoća: $3/121 \approx 0.0248$ (2.5%).

Greška nula (0.00 m): Najverovatniji ishod! Može se desiti na 11 načina (npr. 0 i 0, -0.01 i +0.01, +0.05 i -0.05, itd.).

Verovatnoća: $11/121 \approx 0.0909$ (9.1%).



Greška (m)	Broj pojavljivanja	Verovatnoća (%)
± 0.10	1	0.8%
± 0.08	3	2.5%
± 0.05	6	5.0%
± 0.01	10	8.3%
0.00	11	9.1%

Centralna granična teorema

Međutim, ako bismo umesto dve deonice sabirali deset, dvadeset ili stotinu, i ako bi se nivo greške smanjio:

- Broj mogućih kombinacija bi se drastično povećao.
- "Gomilanje" rezultata oko nule bi postalo još izraženije.
- Ivice histograma bi postale zaobljene.

Prema **Centralnoj graničnoj teoremi**, suma velikog broja nezavisnih slučajnih promenljivih (grešaka) teži normalnoj raspodeli, čak i ako same te greške pojedinačno ne prate normalnu raspodelu.

Ključna veza sa geodetskim merenjima je u tome što se u geodeziji svako "pojedinačno" merenje (npr. jedno očitavanje ugla) zapravo smatra rezultantom (sumom) velikog broja sitnih, nezavisnih grešaka. Kao što se u primeru sa deonicama verovatnoće sabiraju i formiraju bell-curve, tako i ovi sitni faktori unutar jednog merenja formiraju **normalnu raspodelu greške te jedne veličine**. Ono što vidimo kao normalnu raspodelu greške jednog ugla ili jedne dužine je zapravo statistički ishod sabiranja mnoštva sitnih grešaka.

Aritmetička sredina – po principu najmanjih kvadrata

Razmotrimo niz merenja $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ neke veličine, a najbolju procenu te veličine označimo sa $\bar{x}$. U skladu sa opštom definicijom merenja i korekcija (reziduala) možemo zapisati:

$$x_1 + v_1 = \bar{x} \quad x_2 + v_2 = \bar{x} \quad x_3 + v_3 = \bar{x} \quad \dots \quad x_n + v_n = \bar{x}$$

$$v_1 = \bar{x} - x_1 \quad v_2 = \bar{x} - x_2 \quad v_3 = \bar{x} - x_3 \quad \dots \quad v_n = \bar{x} - x_n$$

Ako pretpostavimo da sva merenja imaju jednaku preciznost, možemo formulisati princip najmanjih kvadrata. Definišemo funkciju najmanjih kvadrata φ kao:

$$\varphi = \sum_{i=1}^n v_i^2 = \sum_{i=1}^n (\bar{x} - x_i)^2$$

Aritmetička sredina – po principu najmanjih kvadrata

Ako pretpostavimo da sva merenja imaju jednaku preciznost, možemo formulisati princip najmanjih kvadrata. Definišemo funkciju najmanjih kvadrata φ kao:

$$\varphi = \sum_{i=1}^n v_i^2 = \sum_{i=1}^n (\bar{x} - x_i)^2$$

Dakle, φ je funkcija promenljive p . Njena minimalna vrednost se dobija kada je prvi izvod jednak nuli

$$\frac{d\varphi}{d\bar{x}} = 2(\bar{x} - x_1) + 2(\bar{x} - x_2) + \dots + 2(\bar{x} - x_n) = 0$$

Skratimo članove sa 2 i sredimo jednačinu

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

Najverovatnija vrednost – Aritmetička sredina

Ako smo merili veličinu X ukupno n puta i dobili rezultate merenja:

$$x_1, x_2, \dots, x_n$$

Najverovatnija vrednost (aritmetička sredina):

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$$

Korekcija ili Rezidual

$$v_k = \bar{x} - x_k$$

Prividna ili pojavna greška

$$\varepsilon_k = x_k - \bar{x}$$

Mere preciznosti uzorka – uzoračka varijansa i standardna greška

Ako aritmetična sredina predstavlja najverovatniju vrednost neke merene veličine, greške u opažanjima mogu se predstaviti pomoću reziduala $v_k = \bar{x} - x_k$. Sumiranjem reziduala možemo dobiti ocenu standardne devijacije na osnovu uzorka, koja se naziva **uzoračka standardna devijacija** ili standardna greška. Iz statističkih razloga, standardna devijacija treba da se izračunava na osnovu velikog broja posmatranja. Pošto se u geodetskoj praksi merenja obično izvode u malim skupovima, izračunate standardne devijacije mogu biti pristrasne. Zbog toga je pogodnije koristiti nepristrasne ocene standardne devijacije, poznat kao standardna greška s_x , koja se dobija zamenom n sa $n - 1$ u prethodnoj jednačini, što daje:

$$\text{Standardna greška} = s_x = \pm \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n v_i^2}{n - 1}} = \pm \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\bar{x} - x_i)^2}{n - 1}}$$

Međutim, termin standardna devijacija i standardna greška se često poistovećuju, tj. zanemaruje se preduslov o veličini uzorka. Iz praktičnih razloga i tradicije naše škole, standardna greška će u nastavku teksta biti označavana sa σ .

U ovoj jednačini, izraz $(n - 1)$ poznat je kao broj stepena slobode ili redundansa i predstavlja broj dodatnih merenja izvršenih radi određivanja jedne veličine. Na primer, ako je rastojanje izmereno 10 puta, tada postoji $(10 - 1) = 9$ stepena slobode, što znači da postoji devet suvišnih (redundantnih) posmatranja, budući da je samo jedno merenje dovoljno za određivanje rastojanja.

Slično, uzoračka kovariansa može se oceniti pomoću sledećeg izraza:

$$s_{xy} = \frac{1}{n - 1} \sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x})(y_k - \bar{y})$$

Mere preciznosti – standardna devijacija aritmetičke sredine

Standardna greška σ_x predstavlja meru rasipanja skupa posmatranja, ali takođe se može smatrati standardnom greškom pojedinačnog merenja. Odnosno koliko pojedinačna merenja u proseku odstupaju od očekivane (srednje) vrednosti. Međutim, u geodeziji, pod konačnom vrednosti merenja često se usvaja aritmetička sredina. Standardna greška aritmetičke sredine (najverovatnije vrednosti) skupa rezultata merenja označava se kao $\sigma_{\bar{x}}$ i data je izrazom:

$$\sigma_{\bar{x}} = \pm \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}$$

Treba imati u vidu da standardna devijacija aritmetičke sredine zapravo ne predstavlja veličinu slučajne greške u sredini, već meru nesigurnosti srednje vrednosti usled slučajnih uticaja, pod uslovom da su sistematski uticaji uklonjeni odgovarajućim korekcijama. Nesigurnost u ovom slučaju odnosi se na izvršene korekcije.

Ova formula ima praktičnu primenu u geodeziji. Pretpostavimo da se neka veličina meri terenskom procedurom i opremom za koju je poznata standardna greška. Na primer, meri se rastojanje dužine 30 m, pri čemu je poznata standardna greška $\sigma_x = 6$ mm. Ako se zahteva standardna greška od $\sigma_{\bar{x}} = 3$ mm uz korišćenje iste opreme, iz jednačine (gore) dobijamo (uz $\sigma_x = 6$ mm i $\sigma_{\bar{x}} = 3$ mm):

$$\sigma_{\bar{x}} = 3 = \frac{6}{\sqrt{n}} \text{ odnosno } \sqrt{n} = \frac{6}{3} \text{ što daje } n = 4$$

da biste **udvostručili preciznost** svog konačnog rezultata (odnosno prepolovili grešku), morate **učetvorostručiti broj merenja!**

Kovariaciona matrica uzorka

Prava kovariaciona matrica iz jednačine obično nije poznata, ali se njena procena može dobiti korišćenjem vektora rezidualnih grešaka umesto vektora pravih grešaka. Ako je ℓ rezultata merenja merenih veličina ℓ_i , a vektor $\bar{\ell}$, vektor najverovatnijih vrednosti merenih veličina (gde je $\bar{\ell}_i$ srednja vrednost podvektora i-te merene veličine):

$$\ell = \begin{bmatrix} \ell_1 \\ \ell_2 \\ \vdots \\ \ell_n \end{bmatrix} \quad \bar{\ell} = \begin{bmatrix} \bar{\ell}_1 \\ \bar{\ell}_2 \\ \vdots \\ \bar{\ell}_n \end{bmatrix}$$

Ako je vektor reziduala jednak $v = \ell - \bar{\ell}$. Kovariaciona matrica K može se dati kao $K = E(vv^T)$, gde je $E(\cdot)$ operator poznat kao matematičko očekivanje, odnosno:

$$K = \begin{bmatrix} \sigma_{11}^2 & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22}^2 & \cdots & \sigma_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \cdots & \sigma_{nn}^2 \end{bmatrix}$$

Glavni dijagonalni elementi matrice su varijanse odgovarajućih veličina, a van-dijagonalni elementi predstavljaju kovarijanse. Kao što se vidi, matrica je simetrična, što znači da je $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$, npr. $\sigma_{12} = \sigma_{21}$. Kovarijanse opisuju odnos između skupova opažanja. Ako je kovarijansa nula $\rightarrow$ ne postoji statistička korelacija (veza) između skupova rezultata merenja; ako nije nula $\rightarrow$ postoji statistička korelacija (veza) između skupova rezultata merenja.

Težine rezultata merenja

Težine predstavljaju relativnu preciznost veličina unutar jednog skupa merenja. Težinama se kvantifikuje značajnost nekog merenja unutar skupa merenja. Logično se nameće zaključivanje da bi se merenjima sa većom preciznosti trebala dodeliti veća značajnost prilikom računanja. Taj odnos između varijanse (standardne devijacije) i težine merenja predstavlja jedan od najvažnijih koncepata u stohastičkom modelovanju geodetskih podataka.

Svaka težina se može izraziti kao:

$$P_i = \frac{\sigma_o^2}{\sigma_i^2}$$

Gde je:

- P_i - Težina rezultata merenja (u literaturi na engleskom jeziku se često označava sa „ w_i “, od „weight“)
- σ_o^2 - Referentna varijansa ili varijansa jedinice težine, odnosno varijansa merenja sa težinom $P = 1$.
- σ_i^2 - Varijansa merenja za koje se određuje težina.

visoka preciznost	= mala standardna greška	= visoka težina
slaba (niska) preciznost	= velika standardna greška	= mala težina

Težine rezultata merenja

Kao što je prikazano, težine predstavljaju relativni odnos dve varijanse. Stim u vezi, u poređenju merenja nije važna apsolutna vrednost težine nekog merenja, već odnos težina između merenja. Na primer, ako jedno merenje ima standardnu devijaciju od 10 mm, a drugo 20 mm, njihove varijanse su 100 mm² i 400 mm². Odnos njihovih težina biće 4:1, što znači da će prvo merenje imati **četiri puta veću težinu** od drugog, da će prvo merenje imati četiri puta veći uticaj na najverovatniju vrednost.

Težine se mogu dodeliti na različite načine:

- korišćenjem varijansi izračunatih na osnovu rezultata merenja
- Proporcionalno broju merenja određene velicine ($w \propto n$)
- Na osnovu subjektivne procene uslova tokom merenja

Težinska sredina po principu najmanjih kvadrata

Razmotrimo merenja $x_1, x_2, \dots, x_n$ sa težinama $p_1, p_2, \dots, p_n$. Neka je $\bar{x}$ najbolja ocena.

$$x_1 + v_1 = \bar{x} \quad , \quad x_2 + v_2 = \bar{x} \quad , \quad \dots \quad , \quad x_n + v_n = \bar{x}$$

Iz čega sledi da je : $v_i = \bar{x} - x_i$

Primena Gaussovog principa najmanjih kvadrata: $\varphi = \sum_{i=1}^n P_i (\bar{x} - x_i)^2$

Minimum funkcije φ dobijamo kad je: $\frac{d\varphi}{d\bar{x}} = \sum_{i=1}^n 2P_i (\bar{x} - x_i) = 0$

Skraćivanjem i uređivanjem dobijamo: $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n p_i x_i}{\sum_{i=1}^n p_i}$

Kofaktorska matrica

U praktičnoj primeni postupaka izravnjanja, kovarijaciona matrica K zamenjuje se relativnom kovarijacionom matricom koja se naziva kofaktorska matrica opažanja Q . Veza između ove dve matrice može se dati kao:

$$K = kQ$$

gde je k proizvoljna skalarna konstanta (bez jedinice) ili faktor za skaliranje kofaktorske matrice merenja kako bi bila ekvivalentna kovarijacionoj matrici. Zbog Kofaktorska matrica opažanja može se napisati kao:

$$Q = \frac{1}{k} \begin{bmatrix} \sigma_{11}^2 & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22}^2 & \cdots & \sigma_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \cdots & \sigma_{nn}^2 \end{bmatrix} \quad , \text{odnosno:} \quad Q = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & \cdots & q_{1n} \\ q_{21} & q_{22} & \cdots & q_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{n1} & q_{n2} & \cdots & q_{nn} \end{bmatrix}$$

gde se elementi kofaktorske matrice nazivaju, kofaktori: $q_{11} = \frac{\sigma_{11}^2}{k}, q_{12} = \frac{\sigma_{12}}{k}, \dots, q_{nn} = \frac{\sigma_{nn}^2}{k}$

Intervalne ocene i interval poverenja

Procena srednjih vrednosti, varijansi i kovarijansi slučajnih promenljivih na osnovu podataka uzorka naziva se **tačkasta ocena** (point estimation), jer daje jednu vrednost za svaki posmatrani parametar. Za razliku od tačkaste ocene, određivanje intervala poverenja iz uzorka naziva se **intervalna ocena** (interval estimation).

Nakon što se izvrši tačkasta procena ostaje pitanje kolika je verovatna razlika između procene i još uvek nepoznatog pravog parametra. Drugim rečima, želimo da imamo pokazatelj kolika je nesigurnost ocene parametra.

Apsolutno tačan odgovor nije moguć, jer uzorkovanje nikada ne dovodi do tačne ocene parametara teorijske raspodele. Pridruživanjem određene raspodele verovatnoće posmatranoj promenljivoj, moguće je proceniti verovatnoće sa kojima se prava vrednost parametra nalazi unutar određenog intervala oko uzoračke tačkaste ocene parametre.

Interval poverenja

Verovatnoća da slučajna promenljiva X uzima vrednosti između x_1 i x_2 data je, prema jednačini, kao:

$$P(x_1 < X < x_2) = F(x_2) - F(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx$$

gde je $F(x)$ kumulativna funkcija raspodele slučajne promenljive.

Interval poverenja za neki parametar p čija je ocena $\hat{p}$, može se predstaviti verovatnoćom:

$$P(p_1 < \hat{p} < p_2) = 1 - \alpha$$

Ovaj izraz definiše interval poverenja kao interval oko procene, tako da je verovatnoća da taj interval sadrži (nepoznatu) pravu vrednost parametra p jednaka $1 - \alpha$. $1 - \alpha$ se obično naziva nivo/stepen poverenja (i uobičajeno uzima vrednosti verovatnoće 90%, 95% ili 99%). U našoj literaturi, α se naziva **nivo značajnosti** i, analogno uzima vrednosti 10%, 5% ili 1%.

Vrednosti p_1 i p_2 predstavljaju donju i gornju **granicu intervala** poverenja za parametar p .

Verovatnoća da parametar ne pripada tom intervalu iznosi α .

Širina intervala poverenja se smanjuje kako se broj stepeni slobode povećava i kako se smanjuje nivo verovatnoće.

Interval poverenja srednje vrednosti

Greška tačkaste procene ($\bar{x}$) može se zapisati kao:

$$\varepsilon = \bar{x} - \mu$$

gde se ε može smatrati merom preciznosti $\bar{x}$ kao procene za μ .

Iz raspodele uzorka, može se formirati statistika srednje vrednosti (nova slučajna promenljiva koja ima standardizovanu normalnu raspodelu) može se zapisati kao:

$$z = \frac{\bar{x} - \mu}{\bar{\sigma}}$$

gde je $\bar{\sigma}$ standardna greška aritmetičke sredine. U zavisnosti od toga da li je standardna devijacija populacije poznata ili ne, imamo dva slučaja:

- $\bar{\sigma} = \sigma/\sqrt{n}$, kada je veličina uzorka $n > 30$ i poznata je standardna devijacija populacije (σ)
- $\bar{\sigma} = s/\sqrt{n}$, kada standardna devijacija populacije nije poznata, ali je poznata uzoračka standardna devijacija (s) t-statistika (za slučaj kada je veličina uzorka manja ili jednaka 30) može se zapisati kao:

Interval poverenja srednje vrednosti – poznato σ

Razmatraćemo slučaj normalno raspodeljene slučajne promenljive X , sa nepoznatim očekivanjem μ i poznatom varijancom σ^2 . Neka je uzoračka sredina $\bar{x}$ izračunata iz uzorka veličine n . Tada se može formirati statistika srednje vrednosti (nova slučajna promenljiva koja ima standardizovanu normalnu raspodelu) kao:

$$z = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$$

Da bi definisali interval poverenja za srednju vrednost, biramo vrednost $z_{\alpha/2}$ iz standardne normalne raspodele tako da je verovatnoća da standardna normalna promenljiva izađe iz intervala $(\pm z_{\alpha/2})$ jednaka α :

$$P\left(-z_{\alpha/2} < \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} < z_{\alpha/2}\right) = 1 - \alpha \quad \text{odnosno} \quad P\left(\bar{x} - z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha$$

$$\text{Za } \alpha = 0.05, z_{\alpha/2} = 1.96, \text{ pa važi: } P\left(\bar{x} - 1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + 1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 0.95$$

Interval poverenja srednje vrednosti – poznato σ - PRIMER

Pretpostavimo da je dužina merena $n = 8$ puta sa srednjom vrednošću $\bar{x} = 10.1$ cm.

Pretpostavlja se da je varijansa normalne populacije poznata i iznosi:

$$\sigma^2 = 0.10 \text{ cm}^2$$

Tada je 95% interval poverenja za μ :

$$P\left(10.1 - 1.96 \sqrt{\frac{0.10}{8}} < \mu < 10.1 + 1.96 \sqrt{\frac{0.10}{8}}\right) = 0.95$$

odnosno:

$$P(9.88 \text{ cm} < \mu < 10.32 \text{ cm}) = 0.95$$

Za jednostrani interval:

$$P\left(\mu < 10.1 + 1.645 \sqrt{\frac{0.10}{8}}\right) = 0.95 \quad \Rightarrow \quad P(\mu < 10.28 \text{ cm}) = 0.95$$

Interval poverenja srednje vrednosti – nepoznato σ

Razmotrimo sada slučaj kada standardna devijacija populacije σ nije poznata i zamenjuje se uzoračkom standardnom devijacijom s . Tada statistika ima oblik:

$$z = \frac{\bar{x} - \mu}{s/\sqrt{n}}$$

ima Studentovu **t**-raspodelu sa $n - 1$ stepeni slobode.

Interval poverenja tada ima oblik:

$$P\left(-t_{\alpha/2, n-1} < \frac{\bar{x} - \mu}{s/\sqrt{n}} < t_{\alpha/2, n-1}\right) = 1 - \alpha \quad \text{odnosno} \quad P\left(\bar{x} - t_{\alpha/2, n-1} \frac{s}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + t_{\alpha/2, n-1} \frac{s}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha$$

Za $\alpha = 0.05$ i $n - 1 = 7$, iz tabele Studentove raspodele dobijamo: $t_{\alpha/2} = 2.365$

Interval poverenja je u ovom slučaju širi nego kada je σ poznato.

Kako broj stepeni slobode raste (odnosno kako raste veličina uzorka), razlika između t i z vrednosti se smanjuje.

U praksi, za uzorke veličine 30 ili veće, t-raspodela se često aproksimira standardnom normalnom raspodelom.

Statistički testovi se često koriste za poređenje rezultata sa prethodnim rezultatima ili sa zadatim standardima. U testiranju se nastoji doneti sud o tome da li je neka funkcija procene u saglasnosti sa pretpostavkom (hipotezom) da je uzorak uzet iz populacije sa određenim vrednostima parametara, kao što je normalna raspodela sa zadatom standardnom devijacijom. Pitanja ove vrste su predmet testiranja hipoteza.

Opšti postupak statističkog testiranja uvek se odnosi na nultu hipotezu H_0 — odnosno na skup parametara raspodele u odnosu na koje se porede procene iz uzorka. Cilj je formulisati iskaz o tome da li su parametri uzorka u dovoljnom saglasju sa H_0 . Drugim rečima, rezultat testa je iskaz o tome da li se, na osnovu dostupnih dokaza, nulta hipoteza može smatrati prihvatljivom ili ne.

Statistički testovi

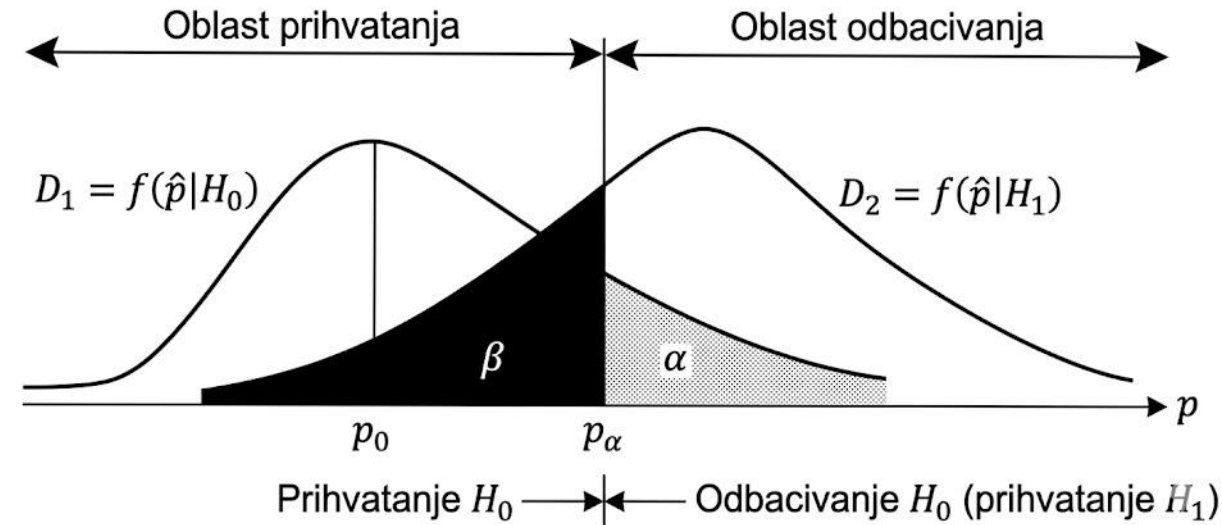
Kada se prihvata ili odbacuje nulta hipoteza, postoje četiri moguća slučaja:

- (a) H_0 je tačna i prihvaćena;
- (b) H_0 je tačna, ali je odbačena;
- (c) H_0 je netačna i odbačena;
- (d) H_0 je netačna i prihvaćena.

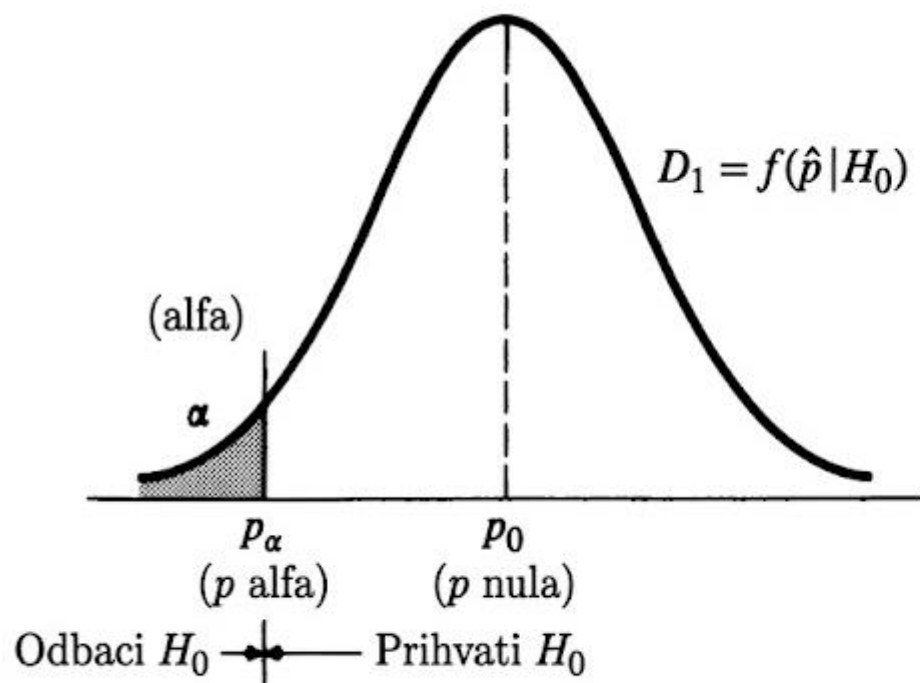
Slučajevi (a) i (c) su očigledno ispravne odluke, dok su (b) i (d) pogrešne odluke. Pogrešno odbacivanje tačne hipoteze naziva se greška Tipa I. Verovatnoća greške Tipa I označava se sa α i naziva se „nivo značajnosti testa“. Uobičajeno se uzima 5%, 2% ili 1%, jer α mora biti mali da bi test imao smisla. Slučaj (d), odnosno pogrešno prihvatanje netačne hipoteze, dovodi do tzv. greške Tipa II. Verovatnoća greške tipa II označava se sa β , a $(1 - \beta)$ naziva se „moć testa“.

Statistički testovi

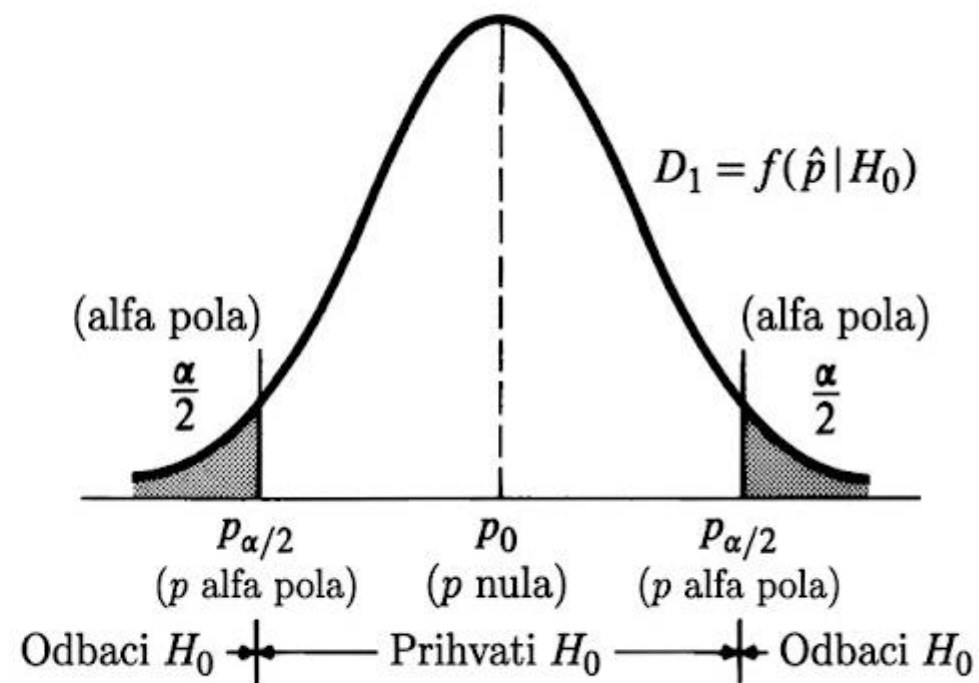
Slika prikazuje odnos između α i β . Neka je $D_1 = f(\hat{p} | H_0)$ uslovna funkcija gustine verovatnoće procene parametra p kada je nulta hipoteza H_0 tačna; a neka je $D_2 = f(\hat{p} | H_1)$ odgovarajuća funkcija kada je alternativna hipoteza H_1 tačna.



Vrednost p_α , označava granicu vrednosti uzorka do koje se H_0 prihvata, a izvan koje se H_0 odbacuje, odnosno prihvata H_1 . Dakle, H_0 se prihvata ako je $\hat{p} < p_\alpha$, a odbacuje (ili se prihvata H_1) ako je $\hat{p} > p_\alpha$. Površina α predstavlja nivo značajnosti testa. Ona pokazuje verovatnoću da parametar uzorka ($\hat{p} | H_0$) premaši p_α kada je H_0 tačna. Drugim rečima, to je verovatnoća odbacivanja H_0 kada je ona tačna (greška Tipa I). Nasuprot tome, površina β pokazuje verovatnoću prihvatanja H_0 kada je H_1 tačna (greška Tipa II). Slika ilustruje da za određenu alternativnu hipotezu H_1 nije moguće proizvoljno smanjiti i α i β . Smanjenje verovatnoće greške Tipa I povećava verovatnoću greške Tipa II i obrnuto. Balansiranje između ove dve vrste grešaka zavisi od svrhe testa.



Levo: Jednostrani test (odbacivanje H_0 sa leve strane)



Desno: Dvostrani test (odbacivanje H_0 sa obe strane)

Zakon o prenosu grešaka

Razmotrimo dva vektora slučajnih promenljivih:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix}, \mathbf{y} = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix}$$

koji su linearno povezani matričnom jednačinom: $\mathbf{y} = \mathbf{Ax} + \mathbf{b}$

gde je A matrica koeficijenata, a b vektor konstanti.

Zakon o prenosu grešaka

Očekivana vrednost vektora $\mathbf{y}$ je:

$$\begin{aligned}\mathbf{m}_y &= E\{\mathbf{y}\} \\ &= E\{\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}\} \\ &= \mathbf{A}E\{\mathbf{x}\} + \mathbf{b} \\ &= \mathbf{A}\mathbf{m}_x + \mathbf{b}\end{aligned}$$

Varijansa vektora $\mathbf{y}$ (tj. kovariaciona matrica) je:

$$\begin{aligned}\mathbf{K}_{yy} &= E\{(\mathbf{y} - \mathbf{m}_y)(\mathbf{y} - \mathbf{m}_y)^T\} \\ &= E\{(\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{m}_x - \mathbf{b})(\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{m}_x - \mathbf{b})^T\} \\ &= E\{(\mathbf{A}(\mathbf{x} - \mathbf{m}_x))(\mathbf{A}(\mathbf{x} - \mathbf{m}_x))^T\} \\ &= \mathbf{A}E\{(\mathbf{x} - \mathbf{m}_x)(\mathbf{x} - \mathbf{m}_x)^T\}\mathbf{A}^T \\ &= \mathbf{A}\mathbf{K}_{xx}\mathbf{A}^T\end{aligned}$$

Ako je $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}$, tada je:

$$\mathbf{K}_{yy} = \mathbf{A}\mathbf{K}_{xx}\mathbf{A}^T$$

Matrica $\mathbf{K}_{xx}$ se zove **Kovariaciona matrica** Može imati tri oblika:

- Merenja su iste preciznosti i nekorelisana,
- Merenja su različite preciznosti i nekorelisana,
- Merenja su različite preciznosti i korelisana.

Zakon o prenosu grešaka – opšti oblik

U mnogim praktičnim slučajevima, vektori slučajnih promenljivih su nelinearno povezani:

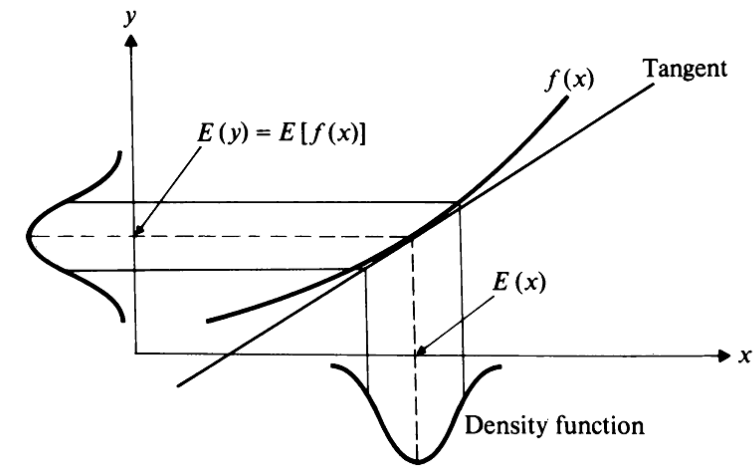
$$\mathbf{y} = f(\mathbf{x})$$

U tom slučaju, funkcija se razvija u Tejlorov red oko tačke $\mathbf{x} = \mathbf{a}$.

Za nelinearnu funkciju $f(x)$ Tejlorov red glasi:

$$f(x) = f(a) + \left. \frac{df}{dx} \right|_a (x - a) + \left. \frac{d^2 f}{dx^2} \right|_a \frac{(x - a)^2}{2!} + \dots + \left. \frac{d^{n-1} f}{dx^{n-1}} \right|_a \frac{(x - a)^{n-1}}{(n - 1)!} + R_n$$

gde je R_n ostatak reda.



Zakon o prenosu grešaka – opšti oblik

Za funkciju $\phi = f(x, y)$, razvoj oko tačke (a, b) glasi:

$$\begin{aligned}\phi = f(a, b) &+ \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{a,b} (x - a) + \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{a,b} (y - b) \\ &+ \frac{1}{2!} \left\{ \left. \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|_{a,b} (x - a)^2 + \left. \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right|_{a,b} (y - b)^2 + \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{a,b} \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{a,b} (x - a)(y - b) \right\} + \dots\end{aligned}$$

Za slučaj više promenljivih, gde vektor $\mathbf{x}$ predstavlja vektor slučajnih promenljivih:

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}^0) + \left. \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}^0} (\mathbf{x} - \mathbf{x}^0) + \text{viši redovi}$$

Uzimajući samo prvi član razvoja:

$$\mathbf{y} \approx f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}^0) + \left. \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}^0} (\mathbf{x} - \mathbf{x}^0)$$

Zakon o prenosu grešaka – opšti oblik

Matematičko očekivanje promenljive y :

$$\begin{aligned}\mathbf{m}_y &= E\{\mathbf{y}\} \\ &= f(\mathbf{x}^0) + \left. \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}^0} E\{\mathbf{x} - \mathbf{x}^0\} \\ &= f(\mathbf{x}^0) + \left. \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}^0} (\mathbf{m}_x - \mathbf{x}^0)\end{aligned}$$

Odstupanje promenljive y od očekivane vrednosti:

$$\begin{aligned}\mathbf{y} - \mathbf{m}_y &= \left[f(\mathbf{x}^0) + \left. \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}^0} (\mathbf{x} - \mathbf{x}^0) \right] - \left[f(\mathbf{x}^0) + \left. \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}^0} (\mathbf{m}_x - \mathbf{x}^0) \right] \\ &= \left. \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}^0} (\mathbf{x} - \mathbf{m}_x) \\ &= \mathbf{J}_{yx} (\mathbf{x} - \mathbf{m}_x)\end{aligned}$$

Matrica $J(m \times n)$ je matrica izvoda i naziva se Jakobijeva matrica:

$$\mathbf{J}_{\mu x} = \begin{bmatrix} \partial y_1 / \partial x_1 & \partial y_1 / \partial x_2 & \cdots & \partial y_1 / \partial x_n \\ \partial y_2 / \partial x_1 & \partial y_2 / \partial x_2 & \cdots & \partial y_2 / \partial x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial y_n / \partial x_1 & \partial y_n / \partial x_2 & \cdots & \partial y_n / \partial x_n \end{bmatrix}$$

Opšti oblik zakona o prenosu grešaka:

$$\begin{aligned}\mathbf{K}_{yy} &= E \left\{ (\mathbf{y} - \mathbf{m}_y) (\mathbf{y} - \mathbf{m}_y)^T \right\} \\ &= E \left\{ (\mathbf{J}_{yx} (\mathbf{x} - \mathbf{m}_x)) (\mathbf{J}_{yx} (\mathbf{x} - \mathbf{m}_x))^T \right\} \\ &= \mathbf{J}_{yx} E \left\{ (\mathbf{x} - \mathbf{m}_x) (\mathbf{x} - \mathbf{m}_x)^T \right\} \mathbf{J}_{yx}^T \\ &= \mathbf{J}_{yx} \mathbf{K}_{xx} \mathbf{J}_{yx}^T\end{aligned}$$

Zakon o prenosu grešaka – specijalni slučaj (algebarski oblik)

Zakon propagacije varijansi se često izražava u obliku algebarske jednačine. Ako je z funkcija dve slučajne promenljive x i y , tj. $z = f(x, y)$. Neka je vektor $\mathbf{x}$, vektor dve slučajne promenljive, $\mathbf{K}_{xx}$ kovariaciona matrica vektora $\mathbf{x}$, Jakovijeva matrica je $\mathbf{J}_{yx}$, tada je:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad \mathbf{K}_{xx} = \begin{bmatrix} \sigma_x^2 & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_y^2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{J}_{yx} = \begin{bmatrix} \frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial y} \end{bmatrix}$$

matrica varijansi i kovarijansi $\mathbf{K}_{zz}$, koja sadrži jedini element σ_z^2 , data je kao:

$$\mathbf{K}_{zz} = [\sigma_z^2] = \begin{bmatrix} \frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x^2 & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_y^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial z}{\partial x} \\ \frac{\partial z}{\partial y} \end{bmatrix}$$

Razvijanjem ovog izraza, dobijamo:

$$\sigma_z^2 = \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 \sigma_x^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 \sigma_y^2 + 2 \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} \sigma_{xy}$$

Zakon o prenosu grešaka – specijalni slučajevi

Primer: prenos grešaka za funkciju zbira

Razmotrimo funkciju:

$$A = a + b$$

gde su a i b merene veličine sa standardnim greškama σ_a i σ_b .

Kada se veličine sabiraju ili oduzimaju:

$$\sigma_A^2 = \left(\frac{\partial A}{\partial a} \cdot \sigma_a \right)^2 + \left(\frac{\partial A}{\partial b} \cdot \sigma_b \right)^2$$

Za sabiranje i oduzimanje:

$$\sigma_A = \pm (\sigma_a^2 + \sigma_b^2)^{1/2}$$

Primer: prenos grešaka za funkciju proizvoda

Razmotrimo proizvod:

$$A = a \cdot b \cdot c$$

gde su a, b, c opterećeni standardnim greškama.

$$\sigma_A^2 = (bc \cdot \sigma_a)^2 + (ac \cdot \sigma_b)^2 + (ab \cdot \sigma_c)^2$$
$$\sigma_A = \pm abc \cdot \sqrt{\left(\frac{\sigma_a}{a}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_b}{b}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_c}{c}\right)^2}$$

✚ Relativne greške se sabiraju u kvadratu.

Primer: prenos grešaka za funkciju količnika

Funkcija:

$$A = \frac{a}{b}$$

$$\sigma_A^2 = \left(\frac{\sigma_a}{b} \right)^2 + \left(\frac{a \cdot \sigma_b}{b^2} \right)^2$$

$$\sigma_A = \pm \frac{a}{b} \cdot \sqrt{\left(\frac{\sigma_a}{a}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_b}{b}\right)^2}$$

✚ Greška zavisi od relativnih grešaka brojioca i imenioca.

Zakon o prenosu grešaka – Primena i primeri

Primena zakona o prenosu grešaka predstavlja važan „alat“ za ocenu tačnosti izračunatih veličina koje potiču iz merenja.

U svakoj primeni zakona o prenosu grešaka jeste unapred (a priori) poznata tačnost merenja. Na primer, ako se veličine izvode iz dužina dobijenih totalnom stanicom, tada se pretpostavlja određeno znanje o tačnosti tih dužina; ako se visinske razlike računaju iz kombinacije dužina i zenitnih uglova, tada se pretpostavlja preciznost dužina i zenitnih uglova. Ove a-priori procene tačnosti mogu poticati iz informacija koje daje proizvođač opreme, iz statističke analize opažanja, prethodnog iskustva ili jednostavno iz stručne procene. Bez obzira na izvor tog znanja, pretpostavlja se da su te tačnosti poznate pre nego što se pristupi propagaciji varijansi.

Zakon o prenosu grešaka – Primer određivanja koordinata tačke

Ako se koordinate tačke A mogu izraziti kao:

$$\begin{aligned}Y_A &= Y_S + \Delta Y = Y_S + D \sin(\beta) \\X_A &= X_S + \Delta X = X_S + D \cos(\beta) \\ \Delta Y &= D \sin \beta \\ \Delta X &= D \cos \beta\end{aligned}$$

tada su parcijalne varijanse:

$$\begin{aligned}\sigma_{\Delta Y}^2 &= \sin^2 \beta \cdot \sigma_D^2 + D^2 \cos^2 \beta \cdot \sigma_\beta^2 \\ \sigma_{\Delta X}^2 &= \cos^2 \beta \cdot \sigma_D^2 + D^2 \sin^2 \beta \cdot \sigma_\beta^2\end{aligned}$$

Gde su σ_D i σ_β standardne devijacije merenog rastojanja i zenitnog ugla.

Zakon o prenosu grešaka – Primer određivanja koordinata tačke

Zadato je:

- $D = 60.000 \text{ m}$
- $\beta = 85^\circ 36' 00'' \rightarrow \beta = 1.493 \text{ rad}$
- $\sigma_D = 8 \text{ mm} + 5 \text{ ppm} = 0.0083 \text{ m}$
- $\sigma_\beta = 10'' = 4.8481 \times 10^{-5} \text{ rad}$

Tada su:

$$\sigma_Y^2 = (\sin \beta)^2 (0.0083)^2 + D^2 (\cos \beta)^2 (\sigma_\beta)^2 = 6.85 \times 10^{-5} \text{ m}^2$$

$$\sigma_X^2 = (\cos \beta)^2 (0.0083)^2 + D^2 (\sin \beta)^2 (\sigma_\beta)^2 = 8.82 \times 10^{-6} \text{ m}^2$$

$$\sigma_Y = \sqrt{6.85 \times 10^{-5}} = 0.0083 \text{ m}$$

$$\sigma_X = \sqrt{8.82 \times 10^{-6}} = 0.0030 \text{ m}$$

Zakon o prenosu grešaka – Primer određivanja koordinata tačke (matrički oblik)

$$\mathbf{y} = f(\mathbf{x})$$

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} Y \\ X \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} D \\ \beta \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \Sigma_{yy} &= \begin{bmatrix} \sigma_Y^2 & \sigma_{XY} \\ \sigma_{YX} & \sigma_X^2 \end{bmatrix} = \mathbf{J}_{yx} \Sigma_{xx} \mathbf{J}_{yx}^T \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\partial Y}{\partial D} & \frac{\partial Y}{\partial \beta} \\ \frac{\partial X}{\partial D} & \frac{\partial X}{\partial \beta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_D^2 & 0 \\ 0 & \sigma_\beta^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial Y}{\partial D} & \frac{\partial X}{\partial D} \\ \frac{\partial Y}{\partial \beta} & \frac{\partial X}{\partial \beta} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \sin \beta & D \cos \beta \\ \cos \beta & -D \sin \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (0.0083)^2 & 0 \\ 0 & (4.8481 \times 10^{-5})^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sin \beta & \cos \beta \\ D \cos \beta & -D \sin \beta \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0.9971 & 4.6031 \\ 0.0767 & -59.8232 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (0.0083)^2 & 0 \\ 0 & (4.8481 \times 10^{-5})^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.9971 & 0.0767 \\ 4.6031 & -59.8232 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 6.85 \times 10^{-5} & 4.62 \times 10^{-6} \\ 4.62 \times 10^{-6} & 8.82 \times 10^{-6} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Dijagonalni elementi predstavljaju varijanse σ_Y^2 i σ_X^2 , dok van-dijagonalni elementi predstavljaju kovarijansu σ_{YX} , što ukazuje na to da su Y i X međusobno zavisni.

Zakon o prenosu grešaka – Primer određivanja visine tačke C

$$\alpha = 75^{\circ}33'25'', \quad \sigma_{\alpha} = 10''$$

$$\beta = 87^{\circ}40'00'', \quad \sigma_{\beta} = 20''$$

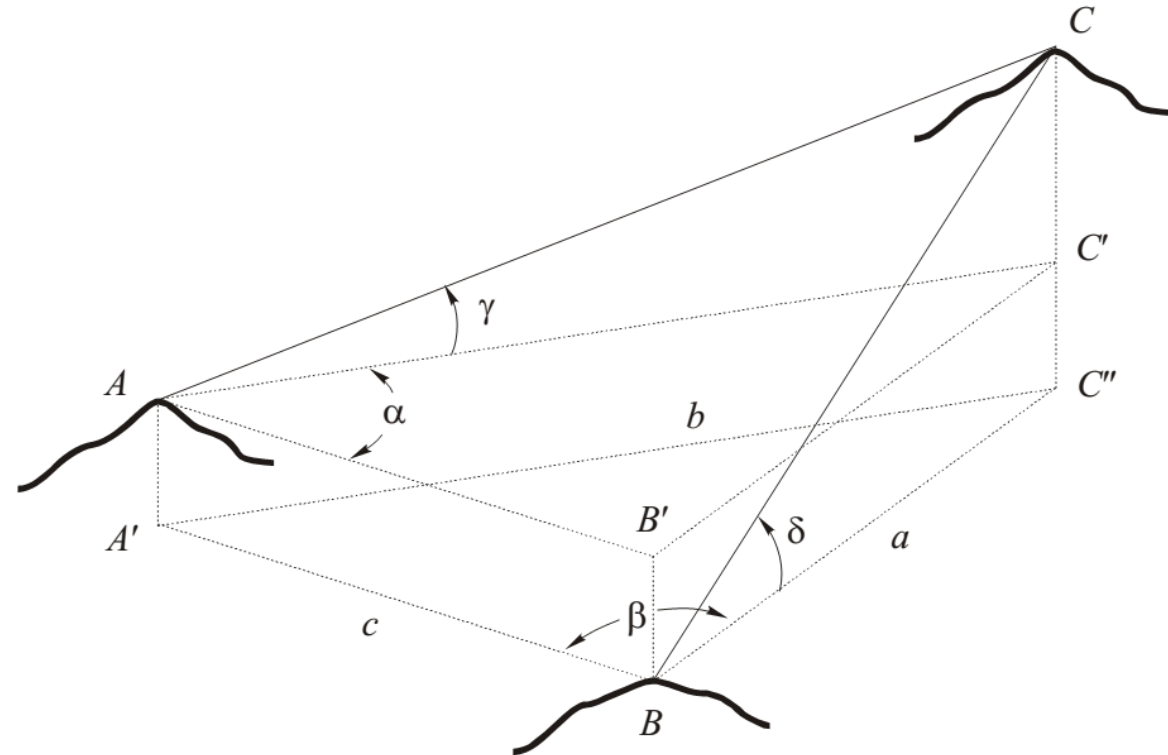
$$\gamma = 10^{\circ}42'10'', \quad \sigma_{\gamma} = 15''$$

$$\delta = 11^{\circ}28'05'', \quad \sigma_{\delta} = 30''$$

$$c = 505.450 \text{ m}, \quad \sigma_c = 0.050 \text{ m}$$

$$H_A = 105.450 \text{ m}, \quad H_B = 92.330 \text{ m}$$

Potrebno je odrediti visinu tačke **C**, kao i ocenu greške visine tačke **C**.



Zakon o prenosu grešaka – Primer određivanja visine tačke C

Iz trougla $A - B - C$ važi sinusno pravilo:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin(180^\circ - (\alpha + \beta))}$$

Pošto je:

$$\sin(180^\circ - (\alpha + \beta)) = \sin(\alpha + \beta)$$

dobijamo:

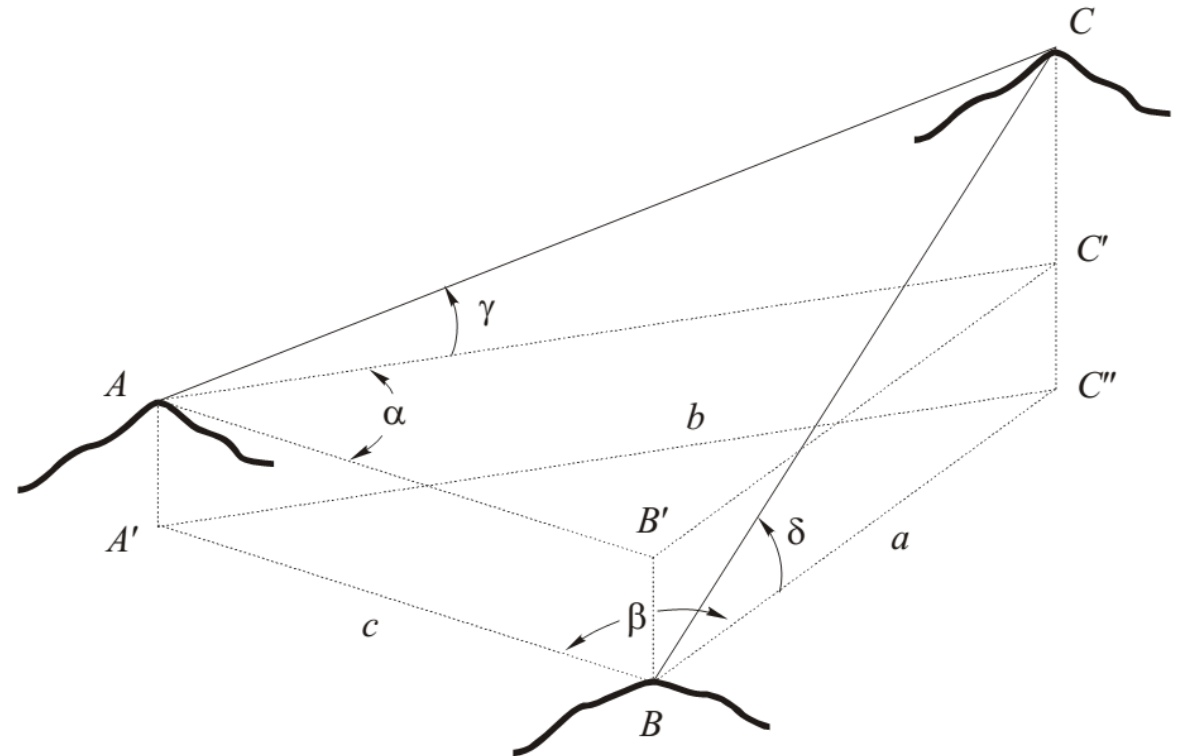
$$a = \frac{c \sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta)}$$

$$b = \frac{c \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)}$$

Uvrštavanjem poznatih vrednosti dobija se:

$$a = 1695.816217 \text{ m}$$

$$b = 1749.707936 \text{ m}$$



Zakon o prenosu grešaka – Primer određivanja visine tačke C

Kota tačke C može se dobiti iz dva izraza:

$$H_C = H_A + b \tan \gamma$$

$$H_C = H_B + a \tan \delta$$

Numerički:

$$H_C^{(A)} = H_A + b \tan \gamma = 436.1486 \text{ m}$$

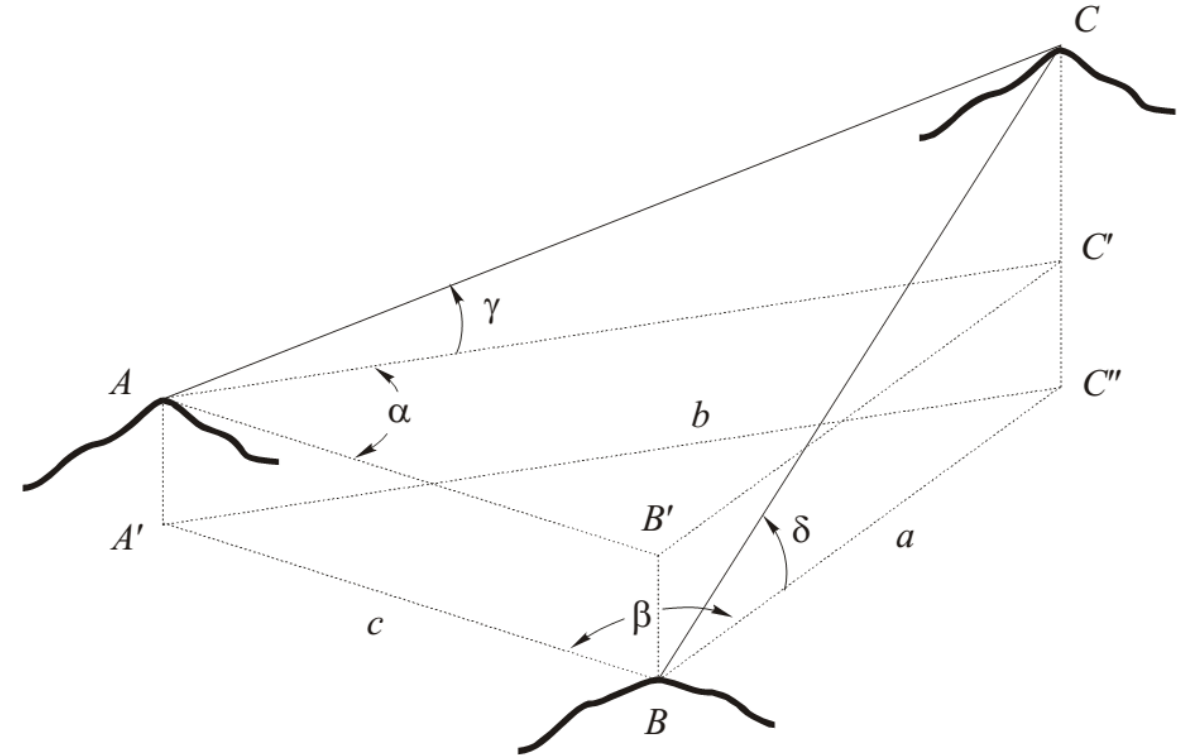
$$H_C^{(B)} = H_B + a \tan \delta = 436.3632 \text{ m}$$

Usvaja se srednja vrednost:

$$H_C = \frac{H_A + H_B + b \tan \gamma + a \tan \delta}{2}$$

$$H_C = \frac{105.450 + 92.330 + 1749.707936 \tan \gamma + 1695.816217 \tan \delta}{2}$$

$$H_C = 436.256 \text{ m}$$



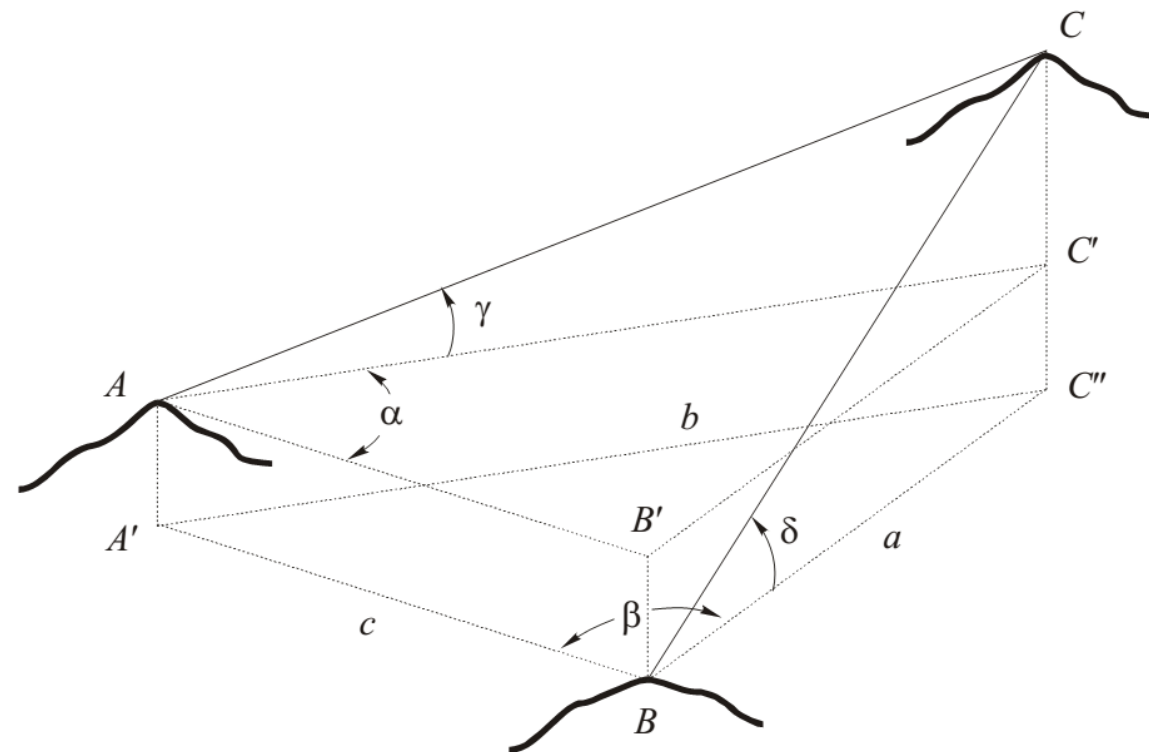
Zakon o prenosu grešaka – Primer određivanja visine tačke C

Pošto su a i b funkcije od α , β i c , prvo se određuje:

$$K_{ab}$$

Zatim se, koristeći a , b , γ i δ , određuje:

$$\sigma_{H_C}^2$$



Zakon o prenosu grešaka – Primer određivanja visine tačke C

Funkcionalni model za a i b

Neka je:

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ c \end{bmatrix}$$

Tada je:

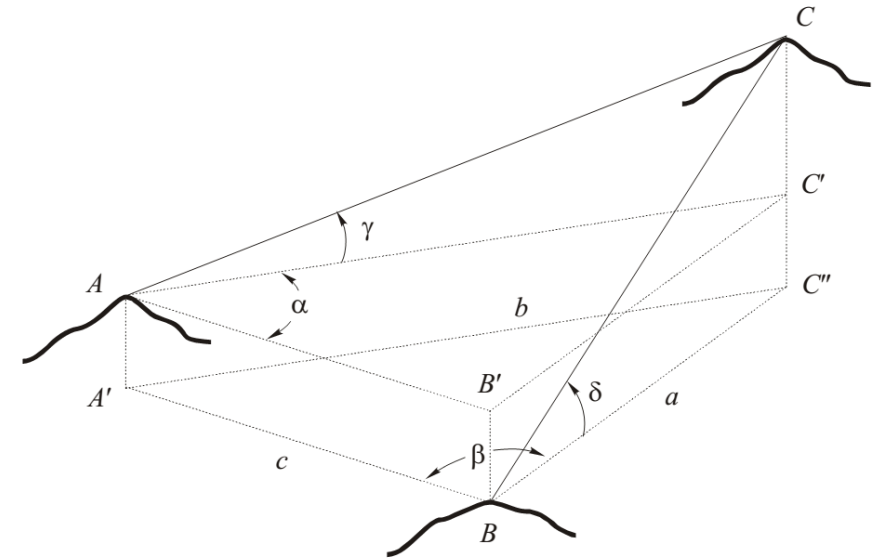
$$\mathbf{y} = f(\mathbf{x})$$

a zakon propagacije varijansi daje:

$$\mathbf{K}_{yy} = J_{yx} \mathbf{K}_{xx} J_{yx}^T$$

gde je:

$$\mathbf{K}_{yy} = \begin{bmatrix} \sigma_a^2 & \sigma_{ab} \\ \sigma_{ba} & \sigma_b^2 \end{bmatrix}$$



$$J_{yx} = \begin{bmatrix} \frac{\partial a}{\partial \alpha} & \frac{\partial a}{\partial \beta} & \frac{\partial a}{\partial c} \\ \frac{\partial b}{\partial \alpha} & \frac{\partial b}{\partial \beta} & \frac{\partial b}{\partial c} \end{bmatrix}$$

Zakon o prenosu grešaka – Primer određivanja visine tačke C

Parcijalni izvodi za (a)

Za:

$$a = \frac{c \sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta)}$$

dobija se:

$$\frac{\partial a}{\partial \alpha} = \frac{c \cos \alpha \sin(\alpha + \beta) - c \sin \alpha \cos(\alpha + \beta)}{\sin^2(\alpha + \beta)}$$

što se može srediti na:

$$\frac{\partial a}{\partial \alpha} = \frac{c \sin \beta}{\sin^2(\alpha + \beta)} = \frac{b}{\sin(\alpha + \beta)}$$

$$\frac{\partial a}{\partial \beta} = -\frac{c \sin \alpha \cos(\alpha + \beta)}{\sin^2(\alpha + \beta)} = -\frac{a}{\tan(\alpha + \beta)}$$

$$\frac{\partial a}{\partial c} = \frac{\sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta)} = \frac{a}{c}$$

Parcijalni izvodi za b

Za:

$$b = \frac{c \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)}$$

dobija se:

$$\frac{\partial b}{\partial \alpha} = -\frac{c \sin \beta \cos(\alpha + \beta)}{\sin^2(\alpha + \beta)} = -\frac{b}{\tan(\alpha + \beta)}$$

$$\frac{\partial b}{\partial \beta} = \frac{c \cos \beta \sin(\alpha + \beta) - c \sin \beta \cos(\alpha + \beta)}{\sin^2(\alpha + \beta)}$$

$$\frac{\partial b}{\partial \beta} = \frac{c \sin \alpha}{\sin^2(\alpha + \beta)} = \frac{a}{\sin(\alpha + \beta)}$$

$$\frac{\partial b}{\partial c} = \frac{\sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)} = \frac{b}{c}$$

Jakobijan J_{yx} – numerički oblik

Na osnovu prethodnih izraza:

$$J_{yx} = \begin{bmatrix} \frac{b}{\sin(\alpha + \beta)} & -\frac{a}{\tan(\alpha + \beta)} & \frac{a}{c} \\ -\frac{b}{\tan(\alpha + \beta)} & \frac{a}{\sin(\alpha + \beta)} & \frac{b}{c} \end{bmatrix}$$

Numerički:

$$J_{yx} = \begin{bmatrix} 6061.961236 & 5625.191025 & 3.355062 \\ 5803.955218 & 5875.250353 & 3.461684 \end{bmatrix}$$

Zakon o prenosu grešaka – Primer određivanja visine tačke C

Pod pretpostavkom da su α, β i c nezavisne veličine:

$$\mathbf{K}_{xx} = \begin{bmatrix} \sigma_{\alpha}^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{\beta}^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_c^2 \end{bmatrix}$$

Pri tome uglovne standardne devijacije moraju biti izražene u radijanima:

$$\sigma_{\alpha} = 10'' = 4.84814 \times 10^{-5} \text{ rad}$$

$$\sigma_{\beta} = 20'' = 9.69627 \times 10^{-5} \text{ rad}$$

a za dužinu:

$$\sigma_c = 0.050 \text{ m}$$

Zakon o prenosu grešaka – Primer određivanja visine tačke C

Primena izraza

$$\mathbf{K}_{yy} = J_{yx} \mathbf{K}_{xx} J_{yx}^T$$

daje:

$$\mathbf{K}_{ab} = \begin{bmatrix} 0.412012 & 0.422455 \\ 0.422455 & 0.433671 \end{bmatrix}$$

Odakle sledi:

$$\sigma_a = \sqrt{0.412012} = 0.642 \text{ m}$$

$$\sigma_b = \sqrt{0.433671} = 0.659 \text{ m}$$

i

$$\sigma_{ab} = 0.422455$$

Zakon o prenosu grešaka – Primer određivanja visine tačke C

Usvojeni izraz za kotu tačke C glasi:

$$H_C = \frac{H_A + H_B + b \tan \gamma + a \tan \delta}{2}$$

Neka je:

$$\mathbf{y} = [H_C]$$

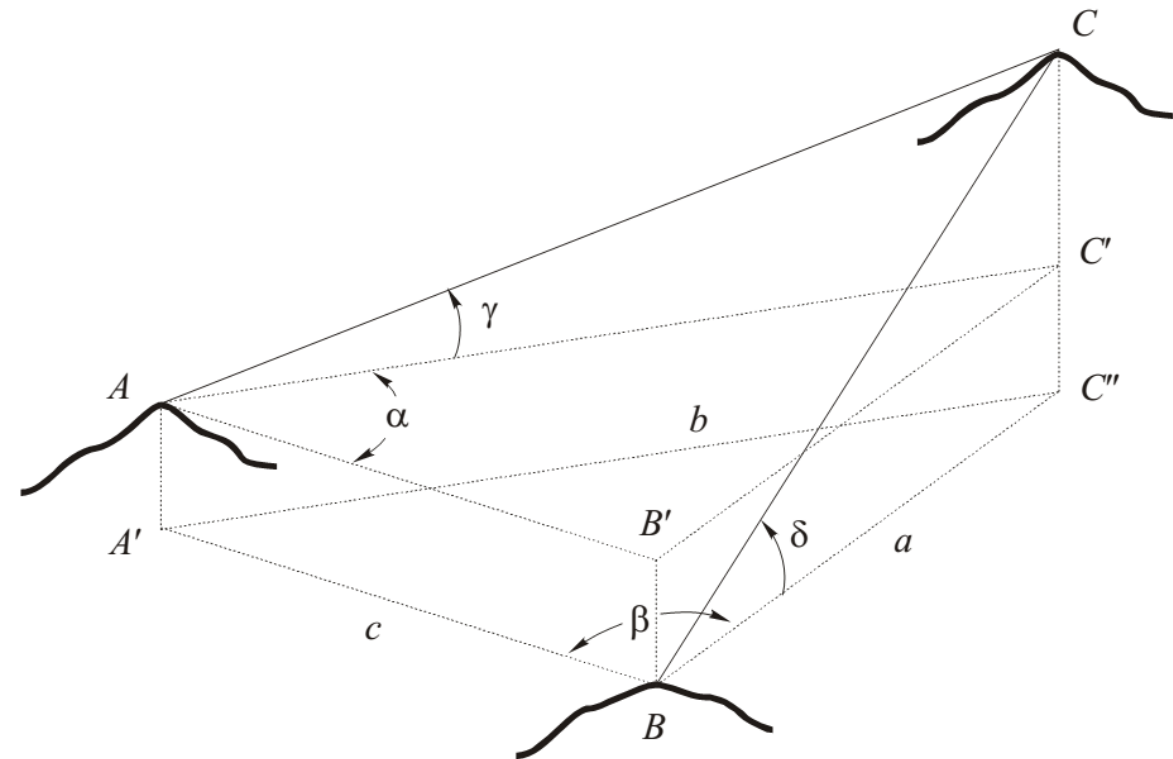
$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ \gamma \\ \delta \end{bmatrix}$$

Tada važi:

$$\mathbf{K}_{yy} = J_{yx} \Sigma_{xx} J_{yx}^T$$

pri čemu je sada:

$$\mathbf{K}_{yy} = [\sigma_{H_C}^2]$$



Zakon o prenosu grešaka – Primer određivanja visine tačke C

Parcijalni izvodi za H_C

Iz funkcionalnog modela dobijamo:

$$\frac{\partial H_C}{\partial a} = \frac{\tan \delta}{2}$$

$$\frac{\partial H_C}{\partial b} = \frac{\tan \gamma}{2}$$

$$\frac{\partial H_C}{\partial \gamma} = \frac{b}{2 \cos^2 \gamma}$$

$$\frac{\partial H_C}{\partial \delta} = \frac{a}{2 \cos^2 \delta}$$

$$J_{yx} = \begin{bmatrix} \frac{\tan \delta}{2} & \frac{\tan \gamma}{2} & \frac{b}{2 \cos^2 \gamma} & \frac{a}{2 \cos^2 \delta} \end{bmatrix}$$

$$J_{yx} = [0.101436 \quad 0.094501 \quad 906.105346 \quad 882.805418]$$

$$\mathbf{K}_{xx} = \begin{bmatrix} \sigma_a^2 & \sigma_{ab} & 0 & 0 \\ \sigma_{ba} & \sigma_b^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_\gamma^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_\delta^2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_{xx} = \begin{bmatrix} 0.412012 & 0.422455 & 0 & 0 \\ 0.422455 & 0.433671 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_\gamma^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_\delta^2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_{yy} = J_{yx} \Sigma_{xx} J_{yx}^T$$

$$\mathbf{K}_{yy} = [0.037040]$$

$$\sigma_{H_C}^2 = 0.037040 \text{ m}^2$$

$$\sigma_{H_C} = \sqrt{0.037040} = 0.192 \text{ m}$$

Hvala na pažnji!